Liczby pierwsze o szczególnym rozmieszczeniu cyfr

Andrzej Nowicki

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytetu M. Kopernika w Toruniu.
(anow @ mat.uni.torun.pl) 30 października 1999

M. Szurek w książce [4] podaje następujące przykłady liczb pierwszych o szczególnym rozmieszczeniu cyfr:

$$\begin{array}{cccc} 188888881, & 111181111, & 722222227, & 727272727, \\ 199999991, & 111191111, & 777767777, & 919191919. \end{array}$$

W opracowaniu internetowym [1] znajdziemy informację o tym, że wszystkie liczby

$$31,\ 331,\ 3331,\ 33331,\ 333331,\ 3333331,\ 33333331.$$

są pierwsze (następna liczba 333333331 już nie jest pierwsza, dzieli się przez 17). Podobne liczby pierwsze znajdziemy na przykład w [3]. W niniejszym artykule podajemy inne przykłady tego typu. Przykłady te otrzymaliśmy przy pomocy komputerowego systemu matematycznego Maple V. Podajemy również odpowiednie własne programy (zapisane w tym systemie) ułatwiające znajdowanie takich liczb pierwszych.

1 Liczby pierwsze postaci aa...ab

Niech a, b, c, n będą liczbami naturalnymi. Następująca procedura $\mathbf{TTTc}(c, a, b, n)$ pozwala znaleźć wszystkie liczby pierwsze postaci

$$c\underbrace{aa\ldots a}_{k}b,$$

dla wszystkich liczb naturalnych k takich, że $1 \leqslant k \leqslant n$.

```
>TTTc:=proc(c::posint,a::posint,b::posint,n2::posint)
>      local i,ij,l1,l2,l3,b1,b2,b3,bb,bb1,aa1,aa2,liczn;
>      l1:=length(a);l2:=length(b);l3:=length(c);b1:=1;b2:=1;b3:=1;liczn:=0;i
>      j:=0; if a=c then ij:=1 fi;
>      if a=b and b=c then ij:=2 fi;
>      for i from 1 to l1 do b1:=b1*10 od;
>      for i from 1 to l2 do b2:=b2*10 od;
>      for i from 1 to l3 do b3:=b3*10 od;
>      aa1:=b;bb:=b2;bb1:=bb;aa2:=c*bb1+aa1;
>      for i from 1 to n2+1 do
>          if isprime(aa2) then print(i-1+ij,aa2);liczn:=liczn+1; fi;
>          aa1:=a*bb+aa1; bb:=bb*b1;bb1:=bb*b3;aa2:=c*bb+aa1;
>        od; print('ilosc',liczn);
>      end;
```

Wykorzystamy teraz tę procedurę w przypadku, gdy $c = a$.

Stosując TTTc$(1, 1, 1, 58)$ dowiadujemy się, że jedynymi liczbami pierwszymi zbudowanymi z samych jedynek, do 60 jedynek włącznie, są trzy liczby:

$$11,\ 1111111111111111111,\ 11111111111111111111111,$$

mające odpowiednio 2, 19 i 23 jedynek. Stosując TTTc$(2, 2, 1, 59)$ dowiadujemy się, że liczby 2221, 222222222222222221, mające odpowiednio 3 i 17 dwójek są jedynymi liczbami pierwszymi, których wszystkie cyfry, oprócz ostatniej, są dwójkami, do 60 dwójek włącznie, a ostatnią cyfrą jest jedynka. Wszystkimi liczbami pierwszymi postaci

$$a_n = \underbrace{33\ldots3}_{n}1, \quad n \leqslant 60,$$

o których już wspominaliśmy, są liczby

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7, a_{17},\ a_{39},\ a_{49},\ a_{59}.$$

Informację tę otrzymujemy dzięki TTTc$(3, 3, 1, 60)$. Stosując TTTc(4,4,1,60) otrzymujemy liczby pierwsze

$$41, \quad 441,\ \underbrace{44\ldots4}_{10}1,\ \ \underbrace{44\ldots4}_{27}1,\ \ \underbrace{44\ldots4}_{54}1.$$

Są to wszystkie liczby pierwsze tego rodzaju do 60 czwórek włącznie. Następująca tabelka przedstawia wszystkie liczby pierwsze postaci $\underbrace{aa\ldots a}_{n}1$, gdzie $a = 5, 6, 7, 8, 9$, $n \leqslant 60$.

a	n
5	$11, 12$
6	$1, 2, 3, 9, 17, 20, 21, 27, 42$
7	$1, 12, 19, 22, 30$
8	$2, 18$
9	$2, 4, 6, 32, 44$

Z tabelki tej odczytujemy, dla przykładu, że liczby

$$991, \quad 99991, \quad 9999991,\ \underbrace{99\ldots9}_{32}1,\ \ \underbrace{99\ldots9}_{44}1,$$

są pierwsze oraz, że są to jedyne liczby pierwsze tego rodzaju do 60 dziewiątek włącznie. Spójrzmy na tabelki dla liczb postaci

$$\underbrace{xx\ldots x}_{n}3, \quad \underbrace{yy\ldots y}_{n}7, \quad \underbrace{zz\ldots z}_{n}9, \quad n \leqslant 60.$$

x	n
1	$1, 2, 4, 8, 10, 23$
2	$1, 2, 7, 10, 35$
3	$---$
4	$1, 2, 5, 8, 11, 29, 31$
5	$1, 7, 25$
6	$---$
7	$1, 2, 4, 8, 11, 14, 20$
8	$1, 2, 4, 7, 8, 14, 50$
9	$---$

y	n
1	$1, 3, 4, 7, 22, 28, 39$
2	$2, 8, 14, 27$
3	$1, 2, 5, 45$
4	$1, 3, 9, 19, 25$
5	$2, 3, 5, 9, 14, 21$
6	$1, 5, 7, 8, 10, 19, 22, 40$
7	$---$
8	$2, 3, 5, 8, 11$
9	$1, 2, 16$

z	n
1	$1, 4, 5, 7, 16, 49$
2	$1, 2, 4, 13$
3	$---$
4	$2, 4, 5, 47$
5	$1, 7, 11, 17, 25, 31$
6	$---$
7	1
8	$1, 13, 16, 34$
9	$---$

Widzimy, w szczególności, że liczby

$$13, \quad 113, \quad 11113, \quad \underbrace{11\ldots1}_{8}3, \quad \underbrace{11\ldots1}_{10}3, \quad \underbrace{11\ldots1}_{23}3,$$

są pierwsze oraz, że są to jedyne liczby pierwsze tego rodzaju do 60 jedynek włącznie. Z tabelek tych odczytujemy podobną informację o liczbach:

$$67, \quad 666667, \quad \underbrace{66\ldots6}_{7}7, \quad \underbrace{66\ldots6}_{8}7, \quad \underbrace{66\ldots6}_{10}7, \quad \underbrace{66\ldots6}_{19}7, \quad \underbrace{66\ldots6}_{22}7, \quad \underbrace{66\ldots6}_{40}7.$$

Wszystkie powyższe dane otrzymaliśmy przy pomocy procedury TTTc(c, a, b, n). Zastosujmy ją jeszcze dla $a = c = 12, 13, \ldots, 19, 1999$ oraz $b = 1$. Otrzymamy wówczas następujące liczby pierwsze.

1212121, 12121212121, 1212121212121212121212121212121212121212121,
131, 1313131313131313131313131,
14141414141,
151, 151515151515151,
151515151515151515151515151515151515151515151515151515151515151,
1616161, 1616161616161616161616161616161616161616161616161616161,
1717171717171717171717171717171, 1717171717171717171717171717171717171,
181, 18181, 181818181818181818181818181818181818181818181818181818181818181,
191, 191919191919191919191919191919191,
19991, 1999199919991999199919991.

2 Liczby pierwsze postaci baa...ab

Nie istnieje żadna liczba pierwsza postaci $122\ldots21$. Każda bowiem taka liczba jest podzielna przez 11. Istnieją jednak liczby pierwsze postaci $1aa\ldots a1$. Stosując TTTc, dla $c = b = 1$ i $a = 3, 4, \ldots, 9$, otrzymujemy następujące liczby pierwsze.

131, 13331, 1333331,
1444441,
151, 15551, 155555555555555555551, 1555555555555555555555555555555551,
16661, 1666666666661, 16666666666666661, 1666666666666666661,
1666666666666666666666666666666666661,
1777771, 17777777777777777777777777777777777777777777777771,
181, 188888881, 188888888888881, 188888888888888888888888888888888888888881,
191, 19991, 199999991, 199999999999999999999999999999999999999991.

Oto jeszcze kilka innych liczb pierwszych otrzymanych przy pomocy TTTc.

313, 3111111111113, 311111111111113, 3111111111111111111111111111113,
3222223, 322222223,
3444443, 3444444444443,
353, 355555553,
373, 377777777777773, 383, 3888888888883, 3888888888888888888888888888883,
727, 72227, 722222227, 72222222222222222222222222227,
74444444447, 7444444444444444444444444444447,
757, 75557, 75555555557, 755555555555555555557, 75555555555555555555557,
76667, 7666667,
787, 78887,
797, 79997, 79999999999999999999999999997,
919
929, 9222229, 9222222222229.

Autor nie znalazł żadnych liczb pierwszych postaci $711\ldots117$, $733\ldots337$, $944\ldots449$, $955\ldots559$ lub $977\ldots779$.

3 Palindromiczne liczby pierwsze

Mówimy, że dana liczba naturalna n jest *palindromiczna* (patrz [3], [2]) jeśli pokrywa się z liczbą mającą cyfry liczby n zapisane w odwrotnym kierunku. Przykłady: 676, 123454321, 55773437755. Liczby $1212\ldots121$, $1313\ldots131$, itp, z którymi spotkaliśmy się w rozdziale 1 są palindromiczne. W poprzednim rozdziale zajmowaliśmy się palindromicznymi liczbami pierwszymi postaci $baa\ldots aab$.

Następująca procedura $\mathbf{SYMp}(n)$ wypisuje wszystkie palindromiczne liczby pierwsze $(2n-1)$ cyfrowe.

```
> SYMp:=proc(nn::posint)
>       local i,i1,i2,i3,aa,qq,qq1,aaa,aab,aac,aad,bbb,liczn;
>       aa:=[1,3,7,9];liczn:=0;
>       qq:=1; for i from 1 to nn-1 do qq:=qq*10 od;
>       for i1 from 1 to 4 do
>            aaa:=aa[i1]*qq;
>            for i2 from 0 to qq-1 do
>                aab:=aaa+i2;
```

```
>               aac:=convert(aab,base,10);
>               bbb:=0;qq1:=qq;
>               for i3 from 2 to nn do
>                    qq1:=qq1/10;bbb:=bbb+aac[i3]*qq1;
>                    od;
>               aad:=aab*qq+bbb;
>               if isprime(aad) then liczn:=liczn+1;print(aad) fi;
>           od;
>       od;
>       print(`ilosc`, liczn);
> end;
```

Każda liczba palindromiczna o parzystej liczbie cyfr jest podzielna przez 11. Palindromiczne liczby pierwsze (oprócz 11) mają więc nieparzystą liczbę cyfr. Jest 15 palindromicznych liczb pierwszych 3 cyfrowych: 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929. Istnieją 93 palindromiczne liczby pierwsze 5-cio cyfrowe. Oto one:

10301,	10501,	10601,	11311,	11411,	12421,	12721,	12821,	13331,	13831,
13931,	14341,	14741,	15451,	15551,	16061,	16361,	16561,	16661,	17471,
17971,	18181,	18481,	19391,	19891,	19991,	30103,	30203,	30403,	30703,
30803,	31013,	31513,	32323,	32423,	33533,	34543,	34843,	35053,	35153,
35353,	35753,	36263,	36563,	37273,	37573,	38083,	38183,	38783,	39293,
70207,	70507,	70607,	71317,	71917,	72227,	72727,	73037,	73237,	73637,
74047,	74747,	75557,	76367,	76667,	77377,	77477,	77977,	78487,	78787,
78887,	79397,	79697,	79997,	90709,	91019,	93139,	93239,	93739,	94049,
94349,	94649,	94849,	94949,	95959,	96269,	96469,	96769,	97379,	97579,
97879,	98389,	98689.							

Tabelka ta powsatała przy pomocy SYMp(3). Następna procedura **SYMpp**(a, n) wypisuje wszystkie palindromiczne liczby pierwsze $(2n-1)$ cyfrowe rozpoczynające się cyframi liczby a.

```
> SYMpp:=proc(a::posint,nn::posint)
>        local i,i1,i2,i3,ix,a1,a2,a3,aa,qq,qq1,qqm,aaa,aab,aac,aad,bbb,liczn;
>        aa:=[1,3,7,9];liczn:=0;
>        a1:=length(a);a2:=convert(a,base,10);
>        ix:=0;a3:=a2[a1];
>        for i1 from 1 to 4 do
>          if aa[i1]=a3 then ix:=1 fi; od;
>        if ix=0 then print(`zla liczba`, a) fi;
>        if a1>nn-1 then print(`zla dlugosc liczby`, a); ix:=0;fi;
>        if ix=1 then
>           qq:=1; for i from 1 to nn-1 do qq:=qq*10 od;
>           qqm:=1; for i from 1 to nn-a1 do qqm:=qqm*10 od;
>           aaa:=a*qqm;
>           for i2 from 0 to qqm-1 do
>                aab:=aaa+i2;
>                aac:=convert(aab,base,10);
>                bbb:=0;qq1:=qq;
>                for i3 from 2 to nn do
>                   qq1:=qq1/10;bbb:=bbb+aac[i3]*qq1;
>                od;
>                aad:=aab*qq+bbb;
>                if isprime(aad) then liczn:=liczn+1;print(aad) fi;
>           od;
>        print(`ilosc`, liczn);
>      fi;
> end;
```

Stosując SYMpp(1999, 5) otrzymujemy liczby pierwsze

$$199909991 \quad \text{i} \quad 199999991.$$

Stosując natomiast SYMpp(1999, 6) otrzymujemy liczby pierwsze:

19990209991, 19990809991, 19992229991, 19993539991, 19994449991,
19994749991, 19995759991, 19997379991, 19997479991, 19998289991.

Następne przykłady palindromicznych liczb pierwszych otrzymano również przy pomocy SYMpp.

123424321
123484321
123494321
12345254321
12345854321

1234562654321
1234565654321
123456737654321
123456797654321
12345678487654321
1234567894987654321

123456789123456789292987654321987654321
123456789123456789505987654321987654321
123456789123456789535987654321987654321
112233445566778899020998877665544332211

111181111
111191111
1111118111111
111111151111111
111111181111111
1111111111111111111
111111111161111111111
11111111111111111111111
11111111111111611111111111111
111111111111111111131111111111111111111

33533
3331333
3337333
333333313333333
333333373333333
333333383333333
33333333333733333333333
333333333333373333333333333
33333333333333333533333333333333333
33333333333333333733333333333333333

77377
77477
77977
7772777
7774777
7778777
777767777
77777677777
7777774777777
777777727777777
777777757777777
77777777677777777
77777777977777777
777777777727777777777
77777777777677777777777
7777777777772777777777777
777777777777757777777777777
777777777777777777797777777777777777777

99999199999
99999999299999999
9999999992999999999
999999999999919999999999999
99999999999999499999999999999

Kolejna procedura **SYMp2**(p, q, n) wypisuje wszystkie palindromiczne liczby pierwsze $(2n-1)$-cyfrowe zbudowane tylko z cyfr p i q.

```
> SYMp2:=proc(p::integer,q::posint,nn::posint)
>       local j,i,i1,i2,i3,n1,n2,aa,qq,qq1,aaa,aab,aac,aad,bbb,dl,lb,bb,c,liczn;
>       n1:=1; qq:=1;
>       for i from 1 to nn-1 do qq:=qq*10 od;
>       for i from 1 to nn-1 do n1:=n1*2 od;
>       n2:=2*n1-1;liczn:=0;
>       for i from n1 to n2 do lb:=convert(i,base,2);
>            dl:=nops(lb); aa:=0; bb:=1;
>            for j from 1 to dl do
>                 c:=p; if lb[j]=1 then c:=q;fi;
>                 aa:=aa+bb*c;bb:=bb*10; od;
>            aac:=convert(aa,base,10); bbb:=0;qq1:=qq;
>            for i3 from 2 to nn do
>                qq1:=qq1/10;bbb:=bbb+aac[i3]*qq1;od;
>            aad:=aa*qq+bbb;
>            if isprime(aad) then liczn:=liczn+1;print(aad) fi;
>       od;
>       if (p=1) or (p=3) or (p=7) or (p=9) then
>            for i from n1 to n2 do
>               lb:=convert(i,base,2);dl:=nops(lb); aa:=0; bb:=1;
>               for j from 1 to dl do
>                   c:=q; if lb[j]=1 then c:=p;fi;
>                   aa:=aa+bb*c;bb:=bb*10;od;
>               aac:=convert(aa,base,10);
>               bbb:=0;qq1:=qq;
>               for i3 from 2 to nn do
>                   qq1:=qq1/10;bbb:=bbb+aac[i3]*qq1;od;
>               aad:=aa*qq+bbb;
>               if isprime(aad) then liczn:=liczn+1;print(aad) fi;
>            od;
>       fi;
>       print(‘ilosc‘, liczn);
> end;
```

Procedury SYMp2$(1, 2, n)$, dla $n = 4, 5, 6$, pozwalają znaleźć wszystkie palindromiczne liczby pierwsze, odpowiednio 7, 9 i 11-to cyfrowe, zbudowane tylko z cyfr 1 i 2. Oto one:

1221221
1212121

121111121
112212211
112111211

12222122221
12121212121

Nie ma tego rodzaju liczb pierwszych 13-to cyfrowych. Jest natomiast 10 takich liczb 15-to cyfrowych i tyleż samo 17-to cyfrowych. Oto one:

122222121222221	12222122122122221
122212222212221	12212121112121221
122212111212221	12212112221121221
122121121121221	12211122122111221
121112111211121	12111111111111121
112222111222211	11222222122222211
112221121122211	11222211211222211
112212212212211	11121111111112111
112111212111211	11112212121221111
111111212111111	11111222122211111

Na zakończenie zanotujmy jeszcze kilka palindromicznych liczb pierwszych zbudowanych z zer i jedynek.

101
100111001
110111011
111010111
1100011100011
1110110110111
1110111110111

101000010000101
101110000011101
111100111001111
10000010101000001
10111000000011101
10111101110111101
10111110101111101
1011111110111111101

100001111111111100001
100011111010111110001
100111111111111111001
101000000010000000101
110000000010000000011
110000011111110000011
111000011111110000111
111101101111101101111
111110000111000011111
111110101111101011111
111111110111011111111

10000100000100000100001
10000111111011111100001
10011111111111111111001
10110111111111111101101
11000000001110000000011
11100000011111000000111
11111100000100000111111
11111111000100011111111
11111111100100111111111
11111111111111111111111

10000000111000000011100000001
10001110001111111110001110001
10001111111111011111111110001
10011111100000000000111111001
10111111111101110111111111101
11110111111101110111111101111
11111101111111011111110111111
11111111000000100000011111111

Spis cytowanej literatury

[1] Ch. K. Caldwell, *Special types of primes*, 1996, http://www.utm.edu/research/primes/.

[2] R. Rabczuk, *O liczbach palindromicznych*, Matematyka, 5(1994), 279 - 281.

[3] P. Ribenboim, *Mała księga wielkich liczb pierwszych*, WNT, Warszawa, 1997.

[4] M. Szurek, *Opowieści matematyczne*, WSiP, Warszawa, 1987.